Thm 8 (Lay p. 64) (Important) $(n \geq 1)$

Si $F = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

et si $p > n$ (plus de vecteurs que de composantes)

alors F est linéairement dépendante.

- càd au moins un des v_i est comb. linéaire des autres
- càd il existe une comb. linéaire non triviale $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ t.q $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}$ (càd au moins un des $\lambda_i \neq 0$)

dém :

Posons $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vdots & \cdots & \vdots & \vec{v}_p \end{pmatrix}_{n \times p}$

Alors $A\vec{x} = \vec{0}$ correspond à un système homogène à n équations
p inconnues

Si $p > n$ (donc on a plus d'inconnues/variables/colonnes que d'équations / lignes)

Alors le système possède au moins une inconnue libre :

car il y a au maximum n pivots (au max un par ligne)

et donc au maximum n variables liées

et comme $p > n$ il y a au moins une variable libre.

donc le système $A\vec{x} = \vec{0}$ (par le Thm 2)

possède au moins une solution non-nulle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{tq} \quad x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}$$

càd la famille est dépendante. cqfd.

ex : 10002 vecteurs dans $\mathbb{R}^{10001}$

- forment toujours une famille lin. dép.

- ⚠ le thm ne dit rien si $p \leq n$

ex : 17'000 vecteurs dans $\mathbb{R}^{20000}$ ne sont pas nécessairement linéairement indépendant.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots = \vec{v}_{17'000}$$

donc : ce n'est pas parce que on a moins de vect. que de composantes que la famille est lin. indép.

§ 1.8 Intro aux applications linéaires

transformation

(Lay. p. 68)

Déf : Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. on déf.

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto T_A(\vec{x}) \overset{\text{déf}}{:=} A\vec{x}$$

T_A s'appelle la transformation matricielle (canoniquement) associée à A

Rappels de théorie des ensembles

Si $f : X \to Y$ fonction entre ens.

Pour $x \in X$, l'élém. $f(x) \in Y$

s'appelle <u>l'image de x par f</u>

X = ens. de départ
Y = " d'arrivée

$$\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf}}{=} \{ f(x) \mid x \in X \} \subset Y$$

<u>l'image de f</u>.

Pour $y \in Y$, on pose

$$f^*(y) \overset{\text{déf}}{=} \{ x \in X \mid f(x) = y \} \subset X$$

<u>la préimage de y par f</u>

(notée parfois $f^{-1}(y)$)

<u>Rem</u> : l'ens. $f^*(y)$ peut être vide

s'il n'existe pas de $x \in X$ t.q. $f(x) = y$.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ $\quad T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T_A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad T_A^*(b) = ?$

peut-on trouver $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ t.q $A\vec{x} = \vec{b}$?

$$T_A^*(b) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid T_A(\vec{x}) = \vec{b}\}$$
$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = S$$

système $\rightsquigarrow$ matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

pivot en dernière colonne

$S = \emptyset$

$\mathrm{Im}(T_A)$? $\qquad T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\parallel$

$$\{T_A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overset{\text{ev}}{=} \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

sont colinéaires

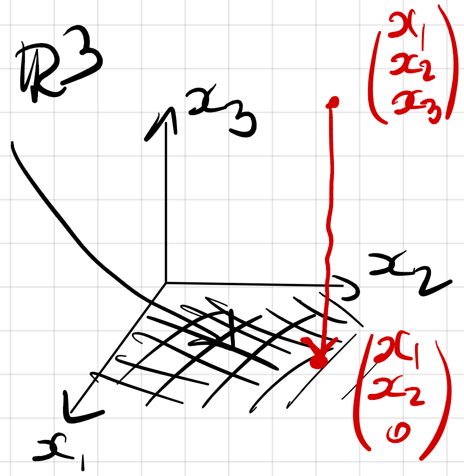
$$= \left\{ (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ = la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$$T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \underset{\text{exo}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}(T_B) =$ le plan Ox_1x_2 dans $\mathbb{R}^3$



$T_B =$ la projection orthogonale sur le plan Ox_1x_2

(qui est d'équation $x_3 = 0$)

Pour $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$T_B^{*}(\vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{si } b_3 \neq 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } b_3 = 0 \end{cases}$$

la droite (verticale) passant par $\vec{b}$ et de vect. directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Soit $m \in \mathbb{R}$ (un paramètre)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^4$$

Q_1: Pour quelle(s) val.(s) de $m \in \mathbb{R}$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont-ils lin. indépendants ?

$$\underset{4\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}} \underset{\ell_4 - \ell_2}{\overset{\ell_3 - \ell_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\ell_2 - m\ell_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1-m^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on a 2 pivots $\Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow m^2 \notin \{-1, 1\}$

donc $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. indép ssi $m \neq -1$

$m \neq 1$

Q_2 : Pour $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ peut-on trouver

$$T_A^*(\vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = S$$

$$\Updownarrow$$

matrice augmentée $\qquad x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{b}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & b_1 \\ m & 1 & b_2 \\ 1 & m & b_3 \\ m & 1 & b_4 \end{array}\right) \underset{\substack{l_3 - l_1 \\ l_4 - l_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & b_1 \\ m & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - b_2 \end{array}\right)$$

Donc $T_A^*(\vec{b}) \neq \emptyset$ (le syst. a une solution)

si et seulement si il n'y a pas de pivot en 3ème colonne

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = b_3 \\ b_2 = b_4 \end{cases}$$

Supposons donc que $b_1 = b_3$ <u>et</u> $b_2 = b_4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & b_1 \\ m & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\leadsto}{\ell_2 - m\ell_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & b_1 \\ 0 & 1-m^2 & b_2 - mb_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- si $m^2 \neq 1$ on a 2 pivots et le système possède une solution unique

$$\begin{cases} x_1 + m x_2 = b_1 \\ (1-m^2)\, x_2 = b_2 - mb_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \overset{\text{calcul}}{\underset{\downarrow}{=}} \dfrac{b_1 - mb_2}{1-m^2} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - mb_1}{1-m^2} \end{cases}$$

(pause)

- si $m^2 = 1$

si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

le syst. admet une sol $\Leftrightarrow$ $b_1 = b_2$ (pas de pivot en 3ème colonne)

si $m=-1$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

le syst. admet une sol. $\Leftrightarrow$ $b_1 = -b_2$.

New POV : ~~Toute matrice~~ tout système $A \in M_{m\times n}$ correspond à une transformation
$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

Def : Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction
on dit que T est linéaire (ou $\mathbb{R}$-linéaire)
si elle vérifie

i) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}) \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

ii) $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(**Rem** : la somme $\vec{x}+\vec{y}$ se fait dans $\mathbb{R}^n$
" $T(\vec{x})+T(\vec{y})$ " " $\mathbb{R}^m$)

<u>Rem</u> : $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire

$$\Leftrightarrow \quad T(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y})$$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

En français : une transfo. T est linéaire

si et seul. si l'image (par T)

d'une combinaison lin. de vecteurs

est la comb. lin. des images des vecteurs

<u>Rem</u> : T linéaire $\Rightarrow$ $T(\vec{0}) = \vec{0}$

$$T(\underbrace{\vec{0}}_{\in \mathbb{R}^n}) = \underbrace{\vec{0}}_{\in \mathbb{R}^m}$$

en effet en prenant

$\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$\lambda = 0$

ii) $T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot T(\vec{0}) = \vec{0}$

Donc si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tq $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$

alors T n'est pas linéaire

par contre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\quad f(0) = 0$ mais

f n'est pas lin.

exemples :

1) Toute matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

donne lieu à $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

et T_A vérifie $T_A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y}) \overset{\text{TL}}{=} A\vec{x}+A\vec{y}$

$= T_A(\vec{x}) + T_A(\vec{y})$

$T_A(\lambda\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$

$= \lambda T_A(\vec{x})$

donc T_A est linéaire.

ex : $A = 0$ la matrice nulle de taille $m\times n$

càd $a_{ij} = 0$ $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

alors $T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ c'est l'appl nulle.
$\vec{x} \mapsto \vec{0}$

ex : la matrice identité $n\times n$ $\quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

$$T_{I_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \mapsto I_n \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}$$

T_{I_n} = la transfo identité sur $\mathbb{R}^n$.

<u>exo</u> : choisissez une matrice $m \times n$
et écrivez la transfo linéaire associée.

On a vu :

$$\left\{ \begin{matrix} \text{matrices } m \times n \\ A \end{matrix} \right\} \underset{\longleftarrow \ \S 1.9.}{\overset{T}{\leadsto}} \left\{ \begin{matrix} \text{transformations linéaires} \\ T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{matrix} \right\}$$

§1.9 Matrice (canoniquement) associée à une transfo. linéaire

(Lay p.77)

Déf : Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une T.L.

et soit $\vec{e}_i$ = la ième colonne de la matrice identité I_n

$$\left(\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ième coord.} \right) \qquad T(\vec{e}_i) \in \mathbb{R}^m$$

On définit une matrice

$$A_T \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \text{par}$$

$$A_T = \Bigg(\underbrace{T(\vec{e}_1)}_{\substack{\text{1ère col} \\ \in \mathbb{R}^m}} \Bigg| \, T(\vec{e}_2) \, \Bigg| \, \cdots \, \Bigg| \underbrace{T(\vec{e}_n)}_{\substack{\text{nème col.} \\ \in \mathbb{R}^m}} \Bigg)_{m \times n}$$

c'est la matrice associée à T

Thm 10 (Lay p.77, Tm 10) (Important)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transfo linéaire

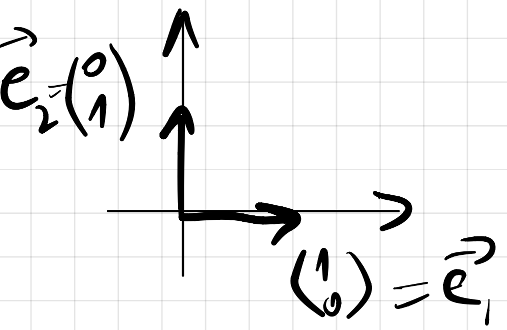
Alors, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on a

$$T(\vec{x}) = A_T \cdot \vec{x}$$

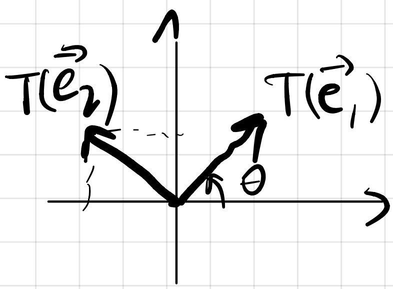
en français : la matrice associée à T garde toute l'info de T

ex :

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ T = la rotation d'angle θ centrée en $(0,0)$



$\overset{T}{\leadsto}$



$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad A_T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

2x2

2) soit $r \in \mathbb{R}$ et $H_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \mapsto r\vec{x}$

$$H_r(\vec{e_i}) = r\vec{e_i}$$

$$A_{H_r} = \begin{pmatrix} r & 0 & & 0 \\ 0 & r & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & r \end{pmatrix}$$

← matrice diagonale hyper simple

§ Transformation inj./surj./bijectives

(Lay p.81)

<u>Def</u>: Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transfo linéaire.

1) T est <u>surjective</u>, si $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q $T(\vec{x}) = \vec{b}$

càd. $\underline{Im(T)} = \mathbb{R}^m$

2) T est <u>injective</u> si $\quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
$T(\vec{x}) = T(\vec{y})$ alors $\vec{x} = \vec{y}$.

3) T est <u>bijective</u> si elle est surj. et inj.

<u>Rem</u> : 1) dit que l'equation

$$T(\vec{x}) = \vec{b}$$

a <u>toujours</u> des solutions

$$A_T(\vec{x}) = \vec{b} \quad \forall \vec{b}$$

voir Thm 4

2) dit que l'eq. $T(\vec{x}) = \vec{b}$

a <u>au plus</u> une solution

(voir thm 5)

3) dit que l'eq. $T(\vec{x}) = \vec{b}$

a exactement une sol. $(\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m)$.

Thm (Thm 11 & 12 Lay p. 82-83)

(Important)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une T.L.
et A_T sa matrice, alors

1) T est injective $\Leftrightarrow$ $A_T \cdot \vec{x} = \vec{0}$
possède seulement la solution nulle

1') T est injective $\Leftrightarrow$ les colonnes de A_T sont lin. indépendantes
(pas de variable libre)
càd 1 pivot par colonne

2) T est surjective $\Leftrightarrow$ $A_T \cdot \vec{x} = \vec{b}$
possède une solution $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

2') T est surjective $\Leftrightarrow$ les colonnes de A_T engendrent $\mathbb{R}^m$
càd il existe 1 pivot par ligne

3) T est bijective $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une sol. unique $\forall \vec{b}$

càd il existe un pivot par ligne et par colonne de A_T